

§2: PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Dạng toán 1: Giải và biện luận phương trình bậc nhất.



Phương pháp

Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		Có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	Phương trình vô nghiệm
	$b = 0$	Phương trình có tập nghiệm là R



Bài tập tự luyện

Bài 1) Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m .

a) $m^2x + m = m^2 - 4x$

b) $m^2x + 6 = x - 6m$

c) $m^2(x+1) - mx = 1$

d) $(m^2 - m)x = m - 1$

e) $4x - 2 = m(mx - 1)$

f) $m^2x + 5 = m(x + 5)$

Bài 2) Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất.

a) $m^2(1-x) = 1 + 3m$

b) $(x-1)(x-m) = 0$

c) $m(m-1)x = m^2 - 1$

d) $\frac{m^2x+1}{x+1} = m$

Bài 3) Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

a) $2mx - 1 = x + m$

b) $m^2x = 9x + m^2 - 4m + 3$

c) $m^2x - m = 25x - 5$

d) $m^3x = mx + m^2 - m$

Bài 4) Tìm m để phương trình sau có nghiệm dương.

a) $m^2(x-1) = x + 4m + 3$

b) $m^2(x-1) = 4x - 3m + 2$

Bài 5) Định a và b để phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

a) $(2x-1)a + 1 = bx$

b) $(x-1)a + (2x+1)b = x + 2$

Bài 6) Cho phương trình: $(m^2 - 1)(x + 2) + 1 = m(*)$.

- Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có nghiệm.
- Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = 3$.
- Tìm m để $x = 3$ là nghiệm của phương trình $(*)$.

Dạng toán 2: Giải và biện luận phương trình bậc 2.



Phương pháp

Hệ số		Kết luận
$a = 0$		Trở về biện luận phương trình $bx + c = 0$
$a \neq 0$	$\Delta < 0$	Phương trình vô nghiệm
	$\Delta = 0$	Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
	$\Delta > 0$	Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$



Bài tập tự luyện

Bài 1) Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m .

- $x^2 - 4x + m - 3 = 0$
- $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 5 = 0$
- $(m - 1)x^2 + (2m - 3)x + m + 2 = 0$
- $(m^2 + m - 2)x^2 + (m + 2)x + 6 = 0$

Bài 2) Định m để phương trình có nghiệm kép.

- $x^2 - 2(m - 1)x + 2m + 1 = 0$
- $mx^2 + 2(m + 3)x + m + 1 = 0$
- $(1 + 4m)x^2 - 4mx + m - 3 = 0$
- $(m - 2)x^2 - mx + 2m - 3 = 0$

Bài 3) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

- $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$
- $(m + 1)x^2 - (2m + 8)x + m - 4 = 0$
- $(m - 1)x^2 + 4x - (m + 4) = 0$

d) $(m+2)x^2 - 2(m+3)x + m = 0$

Bài 4) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm cho trước. Từ đó tính nghiệm còn lại.

a) $m^2x^2 - 2x + 4m + 2 = 0$ biết $x = 1$.

b) $2x^2 + (m+1)x + m^2 - 10 = 0$ biết $x = 2$.

c) $(m+1)x^2 + 2mx + m^2 - 13 = 0$ biết $x = 2$.

d) $(3m+1)x^2 - 2mx + 4 - 6m = 0$ biết $x = -1$.

Bài 5) Xác định m để các phương trình sau.

a) $mx^2 - 2\sqrt{2}mx + 2m - 1 = 0$ vô nghiệm.

b) $x^2 - 3mx + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

c) $(m+1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có nghiệm kép.

d) $3mx^2 + 4mx + \frac{4}{3}m - 2 = 0$ có nghiệm.

Dạng toán 3: Định lý Viet



Phương pháp

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ và } P = x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

⇒ Lưu ý:

$$\square \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$\square \quad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{\Delta}{a^2}$$



Bài tập tự luyện

Bài 1) Định m để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức kèm theo.

a) $x^2 + (m-1)x + m + 6 = 0$ ($x_1^2 + x_2^2 = 10$)

b) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ ($4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$)

c) $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ ($x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 4$)

d) $x^2 - (m+2)x + 2 = 0$ ($\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{9}{2}$)

e) $x^2 - (2m-1)x + m^2 + 2 = 0$ ($x_2 = 2x_1$)

f) $x^2 - (2m-1)x + m + 3 = 0$ ($2x_1 + 3x_2 = 13$)

g) $(m-2)x^2 - (m-4)x - 2 = 0$ ($x_1 - x_2 = 3$)

h) $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 3m - 6 = 0$ ($2x_1x_2 = 5(x_1 + x_2) - 1$)

i) $x^2 + (2m-1)x + m^2 - 2m - 10 = 0$ ($x_1^2 + x_2^2 = 377 - (x_1 + 2)(x_2 + 2)$)

j) $x^2 + (2m+3)x + m^2 + m - 26 = 0$ ($7x_1 + 172 = x_1^2 - 7x_2 + x_2^2$)

Bài 2) Tìm hai số biết tổng, tích của chúng.

a) $S = 7; P = 10$

b) $S = -8; P = 15$

c) $S = -5; P = 0$

d) $S = 4; P = 12$

Bài 3) Tìm phương trình bậc hai khi biết nghiệm của hai phương trình.

a) $x_1 = 3; x_2 = 4$

b) $x_1 = -5; x_2 = 1$

c) $x_1 = 10; x_2 = -7$

d) $x_1 = a + b; x_2 = a - b$

Bài 4) Cho phương trình: $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 2m + 2 = 0$ (1)

a) Định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Chứng minh rằng: $S^2 - 2S = 4P - 5$.

c) Định m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 15$.

d) Định m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $x_1 = 2x_2$.

Bài 5) Cho phương trình $mx^2 - 2m - 2x + m - 3 = 0$. Định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = 3$

Bài 6) Định m để phương trình bậc hai $(m+2)x^2 - 2mx - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt mà khi sắp xếp trên trục số chúng đối xứng nhau qua điểm $x = 2$.

Dạng toán 4: Dấu của nghiệm phương trình bậc 2.

Một số dạng:

- ☐ Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$
- ☐ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 (\Delta' > 0) \end{cases}$
- ☐ Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ suy ra: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- ☐ Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 (\Delta' \geq 0) \end{cases}$ (a có m thì xét thêm $a = 0$)
- ☐ Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 (\Delta' < 0) \end{cases}$ (a có m thì xét thêm $a = 0$)
- ☐ Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- ☐ Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- ☐ Phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
- ☐ Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa:
 - $\diamond x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0$
 - $\diamond \alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$
 - $\diamond x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$



Bài 1) Tìm m để phương trình có **hai nghiệm dương phân biệt**.

- a) $-x^2 + 3x - 5m + 2 = 0$
- b) $mx^2 - 2(m+2)x + 9 = 0$
- c) $(2-m)x^2 + (m+2)x + 2 = 0$
- d) $(m^2 + m + 1)x^2 + (2m - 3)x + m - 5 = 0$

Bài 2) Tìm m để phương trình có **hai nghiệm âm phân biệt**.

- a) $2x^2 - 4(m+1)x + m - 2 = 0$
- b) $x^2 + (m+1)x + 2m + 7 = 0$
- c) $(m-2)x^2 + 2(m+3)x + m - 5 = 0$

Bài 3) Định m để phương trình sau thỏa điều kiện cho trước.

- a) $(m-1)x^2 - 2(m+2)x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.
- b) $x^2 - x + m + 6 = 0$ có một nghiệm âm.
- c) $x^2 - 2(m+1)x + m - 6 = 0$ có một nghiệm âm.

Bài 4) Định m để phương trình $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ có :

- a) Hai nghiệm trái dấu.
- b) Có đúng một nghiệm dương.
- c) Có hai nghiệm dương phân biệt.
- d) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

Bài 5) Cho phương trình $x^2 + 6x - m = 0$.

- a) Định m để phương trình có 1 nghiệm.
- b) Định m để phương trình có đúng 1 nghiệm âm.
- c) Định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng lớn hơn 2.

Bài 6) Cho phương trình $x^4 + m + 1 \quad x^2 + m^2 - 1 = 0$. Định m để phương trình có

- a) 2 nghiệm phân biệt.
- b) 4 nghiệm phân biệt

Bài 7) Cho phương trình $x^2 - 4mx + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa:

- a) $x_1 < 1 < x_2$
- b) $2 < x_1 < x_2$

Dạng toán 5: Phương trình chứa căn – trị tuyệt đối.

Các phương trình cơ bản thường gặp:

$$\clubsuit |A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

$$\clubsuit |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases} \end{cases}$$

$$\clubsuit \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 (A \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

$$\clubsuit \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$



Bài tập tự luyện

Bài 1) Giải các phương trình sau(quy đồng mẫu)

a) $\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 2$

b) $\frac{x+3}{x-4} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{-2}{x^2-6x+8}$

c) $\frac{1}{x-3} = \frac{x^2-3x+5}{x^2-x-6}$

d) $\frac{15}{x^2+2x-3} - \frac{3x-2}{x-1} - \frac{2x+3}{x+3} = \frac{1}{3}$

Bài 2) Giải phương trình dạng $|A| = B$ và $|A| = |B|$

a) $|4x+5| = 1$

b) $|-2x+2| = 5$

c) $|2x+15| = 4x+5$

d) $|-5x+1| - 16 = 3x$

e) $|x^2-1| = 1-4x$

f) $|x^2-7x+2| = x+3$

g) $|x^2+1| + 2x = 1$

h) $x^2 - |5x+2| = -2$

i) $|x^2-2x+2| = |3x-2|$

j) $|5x^2-3x-2| = |x^2-1|$

Bài 3) Giải các phương trình dạng $\sqrt{A} = B$.

a) $\sqrt{x^2+x+1} = 3-x$

b) $\sqrt{3x^2-3} = x+1$

c) $\sqrt{2x^2+3x-4} = 7x+2$

d) $\sqrt{x^2-7x+10} + 1 = 3x$

e) $7 + \sqrt{x^2-3x-1} = 2x$

f) $\sqrt{5-3x+x^2} + 2x = 1$

g) $\sqrt{x^2+6x+9} = |2x-1|$

h) $\sqrt{3x^2-2x-1} = |3x+1|$

Bài 4) Giải các phương trình dạng $\sqrt{A} = \sqrt{B}$.

$$\text{a)} \sqrt{15x-11} = \sqrt{7x-3}$$

$$\text{b)} \sqrt{3x^2-4x-4} = \sqrt{2x+5}$$

$$\text{c)} \sqrt{x^3-x^2-2x} = \sqrt{x-3}$$

$$\text{d)} \sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}$$

$$\text{e)} \sqrt{6x^2-4x+3} = \sqrt{x+4}$$

$$\text{f)} \sqrt{3x^2-2x+1} = \sqrt{2(x+1)}$$

Bài 5) Giải các phương trình dạng $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$.

$$\text{a)} \sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+2} = 1$$

$$\text{b)} \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1} = 8$$

$$\text{c)} \sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$$

$$\text{d)} \sqrt{11-x} - \sqrt{x-1} = 2$$

$$\text{e)} \sqrt{x+4} - \sqrt{2x-6} = 1$$

$$\text{f)} \sqrt{7x+4} - \sqrt{x+1} = 3$$

Bài 6) Giải các phương trình dạng $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = \sqrt{C}$.

$$\text{a)} \sqrt{3x-5} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{x+2}$$

$$\text{b)} \sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3}$$

$$\text{c)} \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$$

$$\text{d)} \sqrt{2-x} = \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}$$

$$\text{e)} \sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-1}$$

$$\text{f)} \sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-5}$$

$$\text{g)} \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$$

$$\text{h)} \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$$

Bài 7) Giải các phương trình $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} + \sqrt{D}$ với $A+C = B+D$.

$$\text{pt} \Leftrightarrow \sqrt{A} - \sqrt{C} = \sqrt{B} - \sqrt{D}$$

$$\text{a)} \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = \sqrt{4x} + \sqrt{2x+2}$$

$$\text{b)} \sqrt{3x+8} - \sqrt{3x+5} = \sqrt{5x-4} - \sqrt{5x-7}$$

$$\text{c)} \sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x} + \sqrt{x^2+2x-2}$$

$$\text{d)} \sqrt{2(x-4)} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{x-6} - \sqrt{x+5}$$

Bài 8) Giải phương trình sau:

$$\text{a)} \sqrt{x+4} = x^2 - 2x - 4$$

$$\text{b)} \sqrt{9x-5} = 3x^2 + 2x + 3$$